Section A1
(Programme M')

MATHEMATIQUES
2ème épreuve

DURÉE : 4 heures

Il est demandé aux candidats de rédiger très soigneusement les démonstrations et de citer avec précision les théorèmes du cours utilisés dans les justifications.

La partie II *est indépendante du reste du problème. On peut traiter les parties* III *et* IV *en admettant les résultats de la partie* I.

On note **R** l'ensemble des nombres réels.

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

I

1° Montrer que, pour toute fonction f réelle, continue, bornée, définie sur **R**, pour tout nombre réel t strictement positif et pour tout nombre réel x, l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,dy \qquad (1)$$

est convergente.

On note $v(x, t)$ la valeur de cette intégrale.

2° Montrer que la fonction v ainsi définie admet une dérivée partielle $\frac{\partial v}{\partial t}$ en tout point de $\mathbf{R} \times]0, +\infty[$ et que l'on peut la calculer par dérivation sous le signe $\int$ dans l'expression (1).

On admettra dans la suite du problème que la fonction v admet aussi des dérivées partielles $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et qu'elles se calculent par dérivation sous le signe $\int$ dans l'expression (1).

3° Montrer que la fonction v vérifie la relation :

$$\forall (x, t) \in \mathbf{R} \times]0, +\infty[\ ,\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t)\,.$$

4° On pose $Kf(x, t) = v(x, t)$ si $(x, t) \in \mathbf{R} \times]0, +\infty[$
et $Kf(x, 0) = f(x)$ si $x \in \mathbf{R}$.

Montrer que Kf est une fonction continue sur $\mathbf{R} \times [0, +\infty[$. (On pourra commencer par faire un changement de variable dans (1) permettant notamment d'écrire $v(x, t)$ sous une forme gardant un sens pour $t = 0$.)

II

On note $\wedge$ l'ensemble des fonctions réelles :

$$u : [0, 1] \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$$
$$(x, t) \longmapsto u(x, t)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

u est continue sur $[0, 1] \times [0, +\infty[$,

u admet des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en tout point de $]0, 1[\times]0, +\infty[$,

ces dérivées partielles satisfont à la relation :

$$\forall (x, t) \in]0, 1[\times]0, +\infty[\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\,.$$

Pour tout nombre réel strictement positif T on note γ_T l'ensemble
$([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, T]) \cup (\{1\} \times [0, T])$.

1° Si h est une fonction réelle deux fois dérivable sur $]0, 1[$ et si h admet un maximum en un point c de $]0, 1[$, que peut-on dire de $h''(c)$?

2° Soit u un élément de $\wedge$, ε et T deux nombres réels strictement positifs.

On note u_ε la fonction définie sur $[0, 1] \times [0, +\infty[$ par :

$$\forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty[\ ,\ u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) + \varepsilon x^2\,.$$

Montrer que tout point en lequel la restriction à $[0, 1] \times [0, T]$ de la fonction u_s atteint son maximum est un point de γ_T.

(On pourra raisonner par l'absurde.)

3° Soit u un élément de $\wedge$ et T un nombre réel strictement positif.

Montrer qu'il existe au moins un point de γ_T en lequel la restriction à $[0, 1] \times [0, T]$ de la fonction u atteint son maximum.

4° Déduire de la question précédente une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments u_1 et u_2 de $\wedge$ soient égaux.

III

1° Si f est une fonction réelle, continue, bornée et impaire, définie sur $\mathbf{R}$ et si t est un nombre réel strictement positif, que peut-on dire de la fonction $x \longmapsto Kf(x, t)$ définie sur $\mathbf{R}$?

2° Si g est une fonction réelle, continue sur $[0, 1]$ et si $g(0) = g(1) = 0$, montrer qu'il existe un élément u de $\wedge$ qui vérifie :

$$\forall\, x \in [0, 1] \quad , \quad u(x, 0) = g(x) ,$$
$$\forall\, t \in [0, +\infty[\quad , \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 .$$

3° Si g est une fonction réelle, continue sur $[0, 1]$, montrer qu'il existe un élément u de $\wedge$ qui vérifie :

$$\forall\, x \in [0, 1] \quad , \quad u(x, 0) = g(x) ,$$
$$\forall\, t \in [0, +\infty[\quad , \quad u(0, t) = g(0) ,$$
$$\forall\, t \in [0, +\infty[\quad , \quad u(1, t) = g(1) .$$

IV

On note Γ l'ensemble des restrictions à $[0, 1] \times [0, +\infty[$ des fonctions w réelles, continues, définies sur $\mathbf{R} \times [0, +\infty[$ vérifiant les propriétés suivantes :

les dérivées partielles $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ existent et sont des fonctions continues de (x, t) sur $\mathbf{R} \times]0, +\infty[$,

$$\forall\, (x, t) \in \mathbf{R} \times]0, +\infty[\quad , \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) ,$$

$$\forall\, t \in]0, +\infty[\quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(1, t) = 0 .$$

1° Soit u un élément de Γ. Montrer que la fonction réelle E définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$E(t) = \int_0^1 u^2(x, t)\, dx$$

est décroissante.

2° Montrer que si u_1 et u_2 sont deux éléments de Γ qui coïncident sur $[0, 1] \times \{0\}$ alors $u_1 = u_2$.

3° Soit g une fonction réelle continue sur $[0, 1]$.

Montrer qu'il existe un élément u de Γ tel que :

$$\forall\, x \in [0, 1] \quad , \quad u(x, 0) = g(x) .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail